## 10.2.7 Derivace složené funkce I

**Předpoklady:** 1205, 1206

Složená funkce = funkce, kterou můžeme rozložit na více funkcí, například $y = \sin x^2$ je složena ze dvou funkcí $z = x^2$ a $y = \sin z$. Jak se derivuje taková funkce?

Zkusíme osvědčenou metodu.
Vezmeme funkci, kterou derivovat umíme: $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3$
Napíšeme si ji jako složenou funkci: $y = \left(x^2\right)^2$ (složena z funkcí: $z = x^2$ a $y = z^2$)
Zkusíme ji derivovat (musí vyjít $y' = 4x^3$):

$y' = \left[\left(x^2\right)^2\right]' = 2\left(x^2\right)^1 \Leftrightarrow$ derivovali jsme vnější funkci $y' = \left(z^2\right)' = 2z^1$, ale nejsme ještě hotoví, zatím nám derivace vychází $2x^2$, má vyjít $4x^3$, ještě tam musíme něco přidat.

Do správného výsledku nám chybí výraz $2x$. Jaký je v našem případě jeho význam?
Například platí: $z = x^2 \Rightarrow z' = 2x$. Je to rozumné?
Asi ano. Derivace udává, jak se *y* mění v závislosti na *x*. Zatím máme ve výpočtu pouze změnu *y* v závislosti na *z*, ale i *z* se mění v závislosti na *x*. Jak? Přece jako $z' = 2x$.

Zřejmě platí: $y' = \left(z^2\right)' = 2z^1 \cdot z' = 2x^2 \cdot 2x = 4x^3$ (vyšlo přesně jak mělo).
$\Rightarrow$ měli jsme funkci $y = f\left(g\left(x\right)\right)$ a platilo: $y'\left(x\right) = f'\left(z\right) \cdot g'\left(x\right)$, kde $f\left(z\right) = f\left(g\left(x\right)\right)$.

Můžeme si to ukázat i jinak:
$y'\left(x\right) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = y'\left(z\right) \cdot z'\left(x\right)$.

**Př. 1:** Nákladní automobil jede po dálnici trvale rychlostí 90 km/h. Při této rychlosti má spotřebu 16 l/100 km. Urči jeho hodinovou spotřebu (kolik litrů nafty spotřebuje za hodinu jízdy).

Určíme spotřebu za 1 km jízdy: 0,16 l / 1 km
za hodinu ujede 90 km $\Rightarrow$ spotřebuje $90 \cdot 0{,}16 = 14{,}4$ litrů za hodinu

Projdeme si vzniklý vztah: $\frac{14{,}4\,\text{litrů}}{1\,\text{hodinu}} = \frac{0{,}16\,\text{litrů}}{1\,\text{km}} \cdot \frac{90\,\text{km}}{1\,\text{hodinu}}$.
Všechny zlomky ve vztahu mají význam derivace:
$\frac{14{,}4\,\text{litrů}}{1\,\text{hodinu}} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, $\frac{0{,}16\,\text{litrů}}{1\,\text{km}} = \frac{\Delta V}{\Delta s}$, $\frac{90\,\text{km}}{1\,\text{hodinu}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
Dosazení: $\frac{14{,}4\,\text{litrů}}{1\,\text{hodinu}} = \frac{0{,}16\,\text{litrů}}{1\,\text{km}} \cdot \frac{90\,\text{km}}{1\,\text{hodinu}} \Leftrightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$ - opět stejný vztah

Nebudeme se dále zdržovat:

**Derivace složené funkce:**
**Jestliže funkce $z=g(x)$ má v bodě $x_0$ derivaci a jestliže funkce $y=f(z)$ má v bodě $z_0=g(x_0)$ derivaci také, má složená funkce $y=(f\circ g)(x_0)=f(g(x))$ derivaci v bodě $x_0$ a platí: $y'=(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.**

Zkráceně: $\left[y(z(x))\right]'=y'(z)\cdot z'(x)$.

Zkusíme derivovat $y=\sin x^2$.
Vnější funkce: $y=\sin z$ $\Rightarrow$ derivujeme $y=\sin z$ a pak násobíme derivací z $x^2$

$$\underbrace{\left(\sin x^2\right)'=\cos x^2\cdot\left(x^2\right)'}_{(\sin z)'=\cos z\cdot z'}=\cos x^2\cdot 2x$$

**Př. 2:** Urči derivace:

a) $\left(\cos x^3\right)'$ b) $\left[\sin\left(x^3+1\right)\right]'$ c) $\left[\mathrm{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]'$ d) $\left(\sin\sqrt{x}\right)'$

a) $\underbrace{\left(\cos x^3\right)'=-\sin x^3\cdot\left(x^3\right)'}_{(\cos z)'=-\sin z\cdot z'}=-\sin x^3\cdot 3x^2$

b) $\underbrace{\left[\sin\left(x^3+1\right)\right]'=\cos\left(x^3+1\right)\left(x^3+1\right)'}_{(\sin z)'=\cos z\cdot z'}=\cos\left(x^3+1\right)\cdot 3x^2$

c) $\underbrace{\left[\mathrm{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}_{(\mathrm{tg}\, z)'=\frac{1}{\cos^2 z}\cdot z'}=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2\cdot\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

d) $\underbrace{\left(\sin\sqrt{x}\right)'=\cos\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}_{(\sin z)'=\cos z\cdot z'}=\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

**Poznámka:** Samozřejmě není nutné rozepisovat celý postup nebo zapisovat pod výpočet způsob složení funkce a je možné psát rovnou například $\left(\cos x^3\right)'=-\sin x^3\cdot 3x^2$. Každý by však měl používat takový typ zápisu, aby dokázal příklady řešit správně.

Někdy není vnější funkce poznat tak snadno jak o v předchozích příkladech.

$$\underbrace{\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cdot (\sin x)'}_{\left(z^2\right)' = 2z \cdot z'} = 2\sin x \cdot \cos x$$

(poslední funkcí bylo umocňování na druhou $\Rightarrow$ proto v první kroku derivujeme druhou mocninu a poté teprve sinus)

**Pedagogická poznámka:** Mohlo by se zdát, že předchozí vysvětlování je zbytečné, ale mnozí studenti nevnímají mocniny a odmocniny jako opravdové funkce a kvůli tomu dělají při výpočtech chyby. Špatný výpočet předchozího příkladu by vypadal typicky takto: $\left(\sin^2 x\right)' = \cos^2 x \cdot 1$.

Na řešení prvního příkladu proto příliš nechvátám, aby i někteří slabší studenti stihli začátek následujícího příkladu pokazit a měli tak po předchozí ukázce něco na opravu a přemýšlení.

**Př. 3:** Urči derivace:

a) $\left(\cos^2 x\right)'$ b) $\left(\sin^3 x\right)'$ c) $\left[\left(x^2+2\right)^3\right]'$ d) $\left(\sqrt{\sin x}\right)'$

a) $\underbrace{\left(\cos^2 x\right)' = 2\cos x \cdot (\cos x)'}_{\left(z^2\right)' = 2z \cdot z'} = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\sin x \cos x$

b) $\underbrace{\left(\sin^3 x\right)' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot (\sin x)'}_{\left(z^3\right)' = 3z^2 \cdot z'} = 3\sin^2 x \cdot \cos x$

c) $\underbrace{\left[\left(x^2+2\right)^3\right]' = 3\left(x^2+2\right)^2 \left(x^2+3\right)'}_{\left(z^3\right)' = 3z^2 \cdot z'} = 3\left(x^2+2\right)^2 2x = 6x\left(x^2+2\right)^2$

d) $\underbrace{\left(\sqrt{\sin x}\right)' = \frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}}(\sin x)'}_{\left(\sqrt{z}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot z'} = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

**Př. 4:** Urči zpaměti derivaci výrazu $\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)'$. Odhad potvrď výpočtem.

Platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$ součet $\sin^2 x + \cos^2 x$ je konstantní a jeho derivace musí být nulová.

$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)' = 2\sin x \cdot \cos x + 2\cos x \cdot (-\sin x) = 0$$

**Př. 5:** Urči derivace:

a) $\left(\frac{3}{3x-1}\right)'$ b) $\left[\cos(3x+\pi)\right]'$ c) $\left[\frac{1}{\left(x^2+2x-3\right)^6}\right]'$ d) $\left(\sqrt[3]{x^2+\cos x}\right)'$

a) $\underbrace{\left(\frac{3}{3x-1}\right)' = 3\cdot\left[-\frac{1}{(3x-1)^2}\right](3x-1)'}_{\left(3z^{-1}\right)' = 3\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)\cdot z'} = \frac{-3}{(3x-1)^2}\cdot 3 = -\frac{9}{(3x-1)^2}$

b) $\underbrace{\left[\cos(3x+\pi)\right]' = -\sin(3x+\pi)\cdot(3x+\pi)'}_{(\cos z)' = -\sin z\cdot z'} = -\sin(3x+\pi)\cdot 3$

c)

$$\underbrace{\left[\frac{1}{\left(x^2+2x-3\right)^6}\right]' = -6\frac{1}{\left(x^2+2x-3\right)^7}\left(x^2+2x-3\right)'}_{\left(z^{-6}\right)' = -6z^{-7}\cdot z'} = \frac{-6}{\left(x^2+2x-3\right)^7}(2x+2) = -\frac{12(x+1)}{\left(x^2+2x-3\right)^7}$$

d) $\underbrace{\left(\sqrt[3]{x^2+\cos x}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^2+\cos x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2+\cos x\right)'}_{\left(\sqrt[3]{z}\right)' = \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}\cdot z'} = \frac{1}{3}\frac{2x-\sin x}{\sqrt[3]{\left(x^2+\cos x\right)^2}}$

Složené funkce se samozřejmě mohou vyskytovat na všech místech, kde můžeme nalézt funkce elementární. Tedy i uvnitř součtů, součinů nebo podílů. Derivování se tím dále komplikuje.

**Př. 6:** Urči derivace:

a) $\left[\cos(3x)+(2x+1)^2\right]'$ b) $\left(x^4\cdot\sin^2 x\right)'$ c) $\left[\frac{x^2+1}{\left(2x^2-3\right)^2}\right]'$

a) $\left[\cos(3x)+(2x+1)^2\right]' = -\sin(3x)\cdot(3x)' + 2(2x+1)^1(2x+1)' = -3\cdot\sin(3x)+4(2x+1)$

b) $\left(x^4\cdot\sin^2 x\right)' = \left(x^4\right)'\sin^2 x + x^4\left(\sin^2 x\right)' = 4x^3\sin^2 x + x^4\cdot 2\sin x\cdot\cos x$

c) $$\left[\frac{x^2+1}{\left(2x^2-3\right)^2}\right]' = \frac{\left(x^2+1\right)'\cdot\left(2x^2-3\right)^2-\left(x^2+1\right)\left[\left(2x^2-3\right)^2\right]'}{\left(2x^2-3\right)^4} =$$

$$= \frac{2x\left(2x^2-3\right)^2-\left(x^2+1\right)\cdot 2\left(2x^2-3\right)\cdot 4x}{\left(2x^2-3\right)^4}$$

**Př. 7:** Petáková:
strana 156/cvičení 22 $f_2$, $f_4$, $f_9$

**Shrnutí:**